Área Máxima: construindo o conceito de limites de funções com Geogebra

Antonio José da Silva
Universidade Federal do Maranhão - UFMA
CCLCN/CCHNST
PGIE – UFRGS, Porto Alegre – RS, Brasil
+559832729782, Pinheiro, Maranhão, Brasil
antoniojsilva@ufma.br

Fernando Becker
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Faculdade de Educação -FACED/ Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação - PGIE
+555133083986, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil
fernando.becker@ufrgs.br

ABSTRACT
This article describes research on the functions of limit concepts presented by students when using the learning object Maximum Area, developed with the Geogebra software. Analyzed, the theoretical basis of Genetic Epistemology, the interpretations given by the students to problem situations, which had been recorded by the teacher. The results show these interpretations, given by the students, studying the approach areas as a case of functions limit.

RESUMO
Este artigo descreve a pesquisa sobre as noções de limite de funções apresentadas por alunos ao utilizarem o objeto de aprendizagem Área Máxima, desenvolvido com o software Geogebra. Analisou-se, à base teórica da Epistemologia Genética, as interpretações dadas pelos alunos às situações-problema, que haviam sido registradas pelo professor. Os resultados mostram essas interpretações, dadas pelos alunos, ao estudar a aproximação de áreas como um caso de limite de funções.

General Terms
Experimentation, Human Factors.

Keywords
Epistemologia Genética, Abstração Reflexionante, Limite de Funções, Geogebra.

1. INTRODUÇÃO
Como utilizar as novas tecnologias de informação e comunicação – aplicativos, softwares, computador, etc. – para que sejam ferramentas de apoio pedagógico na educação? Este é um questionamento realizado constantemente por professores, pesquisadores e educadores. A introdução de objetos digitais para a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) já é feita, e os resultados são significativos [10], [4], [9].

Diante da imensa quantidade de aplicativos existentes e materiais disponíveis na *internet*, torna-se necessário investimentos de tempo, de conhecimento e financeiro, dos profissionais ligados à educação, pois eles necessitam conhecer pelo menos parte desse material e distinguir nessa imensidão, aqueles que possuem a qualidade desejável para serem utilizados pelos alunos no processo de construção do conhecimento [8], [5]. Nesse sentido, projetar e construir objetos virtuais de aprendizagem é uma alternativa interessante para o cenário educacional atual, e o Geogebra se insere nesse contexto, pois é um *software* que possui relativa facilidade de uso e acesso a material instrucional desenvolvido como *applets* (*Applet* é um pequeno *software* que executa uma atividade específica, dentro de outro programa maior, como, por exemplo, um navegador *web*).

O problema de estudo busca compreender a noção de limite apresentada por alunos ao utilizarem um *applets* do geogebra que auxilia na compreensão de um problema proposto, uma situação-problema. Os resultados da pesquisa podem atuar na compreensão e diminuição do índice de reprovação e abandono nos cursos iniciais de CDI nas universidades brasileiras. Destacaremos o caso da Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Esse problema, retratado em [2], afirma que o baixo índice de aprovação em CDI pode ser um importante fator, não somente de retenção e evasão, mas, também, de desestímulo àqueles que poderiam escolher os cursos nos quais o tema ou disciplina é ministrada. Para [16], o ensino de cálculo é estudado promovendo dois mapeamentos que visam o levantamento e o entendimento de dificuldades de natureza epistemológica; ele destaca ainda que o problema do “fracasso do cálculo” não é um fenômeno isolado, pois é retratado em vários trabalhos da comunidade científica no exterior. No curso de Licenciatura em Ciências Naturais, foi registrado um número muito baixo de aprovados na disciplina CDI considerando o número de inscritos, em 5 (cinco) semestres letivos; a média de aprovação foi de 54% segundo dados coletados na coordenação do curso. Ao realizar pesquisas sobre os resultados finais dessa disciplina, foi possível perceber a dimensão do problema e, segundo [16], [11], ele existe em escala mundial. Após consultas aos órgãos de controle da UFMA, verificou-se que, entre o segundo semestre de 2012 e o primeiro semestre letivo de 2014, totalizando sete períodos, matricularam-se, em números absolutos, 4.109 (quatro mil cento e nove) alunos, em 23 (vinte e três) disciplinas de CDI ou similares, ofertadas em 21 (vinte e um) diferentes cursos. Desse total de alunos matriculados, 43,59%, isto é, 1.791 (mil setecentos e noventa e um) alunos foram aprovados e prosseguiram em seus cursos; e 2.318 (dois mil trezentos e dezoito) alunos, de alguma forma, ficaram retidos. Esses dados justificam a pesquisa com alunos da disciplina CDI, para compreender o que acontece com a aprendizagem ao trabalhar a conceituação de limite de funções.

Esta pesquisa visa a tratar essa problemática caracterizada como obtenção de baixo índice de aprovação na disciplina CDI. Visa a conhecer as noções apresentadas no processo de interação entre alunos e *applets* ao tentar conceituar limite de funções. Portanto, o objetivo desta pesquisa é conhecer e analisar as noções de limites de funções apresentadas por alunos ao utilizarem *applets* do Geogebra. Nesta pesquisa, trata-se a atividade proposta aos alunos nos *applets* como uma situação-problema. Para Dolle (2011, p. 13), “É colocando o aluno diante de situações-problema que ele é solicitado a construir sua solução e, assim, a fornecer a explicação para estas". O interesse desta pesquisa está centrado nos registros, na capacidade de um aluno realizar registro em processo de construção de conhecimento. No entanto, segundo Delval (2002, p. 67): "O sujeito tem de resolver tarefas mediante sua ação e pede-se a ele explicações do que faz. A explicação é um complemento da ação [...]", mas pelas razões já citadas, as análises ocorrerão a partir do conjunto de respostas, e um estudo centrado nas entrevistas ocorrerá no prosseguimento da pesquisa.

Um caso de utilização de registro para avaliação da aprendizagem é o estudo de [13]. Nele é descrita uma experiência de aprendizagem na disciplina Cálculo Diferencial. Os registros foram realizados em um ambiente virtual de aprendizagem com suporte para escrita científica, possibilitando inferir como os alunos desenvolviam conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Um sistema web para o cálculo diferencial e integral (SCDI) foi desenvolvido por em [9]. Nele o sistema foi validado. O SCDI, além de conter teoria do CDI, permite realizar operações no estudo de limites, derivada e integral de funções. Segundo o estudo a utilização resultou em melhorias no aproveitamento de alunos na disciplina.

O cálculo tem na tecnologia, suporte para o entendimento gráfico e busca de soluções mais complexas. Este trabalho propõe a análise de registros de alunos ao utilizar *applets* do Geogebra e tecnologias do Google Drive. Com procedimentos e orientações próprias da execução da disciplina CDI, tem-se a expectativa de que essas tecnologias conjuntas permitam ao docente uma avaliação da resposta livre do aluno quando utiliza o *applet* do Geogebra e os conhecimentos contidos na aplicação para a construção de conhecimento.

2. TECNOLOGIAS, CONHECIMENTO E UMA DIDÁTICA FUNDAMENTADA NA TEORIA DE PIAGET

Esta pesquisa buscou tanto sua fundamentação didática, quanto sua concepção de construção de conhecimento, na Epistemologia Genética; enquanto teoria de conhecimento atemo-nos na abstração reflexionante. Essa teoria foi formulada por Jean Piaget para explicar como um conhecimento novo é criado. Segundo ela, os humanos desenvolvem-se cognitivamente agindo sobre o real e retirando dele qualidades (abstração empírica) e sobre as próprias ações e coordenações das ações retirando delas qualidades com as quais constroem novas capacidades (abstração reflexionante). Piaget (1995) destaca dois tipos de abstração, a primeira é a empírica e a segunda é a reflexionante. A abstração empírica: "[...] se apóia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões, etc. [...]" (p.5). A abstração empírica tem por base a extração de informações dos objetos, através da ação que o sujeito exerce sobre o objeto; é um conhecimento extraído diretamente dos observáveis; ele extrai propriedades que existiam nesse objeto antes de qualquer ação do sujeito, e assim, não explica a novidade do pensamento. A abstração reflexionante é caracterizada como aquela que: "apoia-se sobre as formas e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito [...] para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades [...]" (p.6). Diferentemente da abstração empírica que retira conhecimento dos objetos, a reflexionante retira conhecimento das coordenações das ações do sujeito.

Existem dois processos importantes, que se complementam, na teoria da abstração reflexionante; um é a reflexão e o outro o reflexionamento. O "reflexionamento" é a projeção de um conhecimento para um patamar superior; já a "reflexão" é o processo mental de reconstrução e reorganização do que foi enviado para o patamar superior [15], [3]. Piaget explica assim a relação entre esses processos: "a abstração reflexionante é a fonte contínua de novidades, porque atinge novas "reflexões" sobre cada um dos planos sucessivos do "reflexionamento" e estes se engendram sem que sua sequência seja jamais acabada" (p. 205). Ainda sobre essa relação Piaget diz que: "[...] todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão [...]" (p. 276), e assim teremos uma alternância entre esses dois processos (reflexionamento e reflexão), como também conteúdos e formas, e numa projeção seguinte suas novidades e reelaborações, e sobretudo, sem começo absoluto. Piaget desdobrar a abstração reflexionante em abstração pseudo-empírica (embora retire características dos objetos que o próprio sujeito colocou neles, isso é, as propriedades são introduzidas neles pela ação do sujeitoque retira características da coordenação de suas ações) e abstração refletida, como um processo de reflexão da reflexão, quando o sujeito toma consciência do processo que o levou à construção do conhecimento [15], [3]

Para Piaget (1995), o conceito de aprendizagem define-se por assimilação de conteúdos pelos esquemas ou estruturas construídas no processo de desenvolvimento, por abstração reflexionante [15]. Assimilam-se assim conteúdos que não podiam ser assimilados antes da construção de tais esquemas ou estruturas.

Um processo didático, fundamentado na Epistemologia Genética, concebe o pensamento como não estático; não é uma coleção de conteúdos e imagens, é sim dinâmico, atuante e realiza-se mediante operações. Pensar é operar com os conhecimentos; constroem-se novos conhecimentos à media que submetemos novas experiências aos esquemas existentes por processos interiorizados a serem discutidos mais à frente. O ensino deve provocar a execução de certas operações, pois são as operações que definem as noções que condensam as significações [1]. O conhecimento é produzido pela ação, interação entre sujeito e objeto, sendo concebido em função das estruturas que o estabeleceram; é assim que o sujeito apropria-se dos mecanismos mais íntimos das ações, problematizando-as; sem isso não há novidade [3], [7]. Para Dolle (2011, p. 9): "[...] aprender é uma atividade e, como toda atividade, ela envolve estruturas.".

Surge uma questão, quais são as estruturas necessárias? A devida respostas a este questionamento pode diferenciar o sucesso do fracasso no processo educativo. Segundo Becker (2012, p. 41) "[...] o processo da aprendizagem deve ser radicalmente vinculado ao processo de desenvolvimento [...]. Desvinculado dele não passará de treinamento [...] ". A atividade proposta como uma situação-problema apresenta etapas de aprendizagem e desenvolvimento cognitivo. O princípio da pesquisa pelo aluno é o mais difícil, pois se considerarmos uma boa ordenação dos trabalhos docentes, a pesquisa ou investigação de problemas, ou situação problema, depende do aluno. Uma outra questão que envolve atividades de pesquisa é que se o problema for apresentado e não se apelar para esquemas que o aluno dispõe com facilidade e os dados iniciais não são suficientes, então a pesquisa não chega aos resultados esperados. É preciso dar ao aluno a oportunidade de executar materialmente as operações durante os ensaios, tateios, ou seja, deve-se oportunizar a interação entre aluno e seu objeto de conhecimento, tendo presente a visão didática que professamos: “[...] um problema, que tem por objeto a realização ou a descoberta de uma operação, é sempre um projeto de ação, realizável por manipulações efetivas [...]” (AEBLI, 1978, p. 97).

Segundo Becker (2012, p. 43), “[...] o termo “objeto”, que abrange na epistemologia tudo aquilo que o sujeito não é, incluindo ali o meio social e físico, é reduzido a objetos do mundo físico. ”; segundo ele, isso destrói a contribuição da Epistemologia Genética.

A informática tem em seu vocabulário o termo objeto, amplamente utilizado na orientação em programação. Na informática aplicada à educação o termo objeto de aprendizagem é amplamente difundido desde os anos 2000. Entre autores, a definição de Objeto de Aprendizagem (OA) é controversa, e vários trabalhos tentam reformular essa definição no intuito de adequá-la a contextos educacionais e digitais mais atuais [5]. Nesta pesquisa iremos apresentar uma definição, e sua abordagem será condizente com a crítica contida em [3], e consideraremos como objeto tudo aquilo que não é o sujeito, inclusive os objetos de aprendizagem tal como são definidos. Um OA é uma: “[...] unidade de conteúdo digital, autocontida e independente, a qual está associada com um ou mais objetivos de aprendizagem e tem como objetivo primário a habilidade de reuso em diferentes contextos educacionais” (NIKOLOPOULOS et al., 2012 apud CARNEIRO; SILVEIRA, 2014, p. 239). Essa definição é abrangente quanto à variabilidade de conteúdos digitais, mas bem definida quanto aos objetivos e características para seu fim educacional.

3. OA – ÁREA MÁXIMA

A atividade Área Máxima (OA – Área Máxima), consiste em uma página *web* disponível no endereço http://geogebra.nasnuvens.net.br/atividades/area-maxima/ disponibilizada para uso aberto. Nessa página há um conjunto de questões que direcionam à investigação do problema proposto; nela há um *applet*, desenvolvido com o *software* Geogebra pelos autores, que representa a situação-problema em estudo. O desenvolvimento do *applet* priorizou a caracterização de um problema que envolvesse limite de funções que pudesse permitir a construção de conhecimentos relativos ao cálculo diferencial e integral. O *applet* permite manipulações, animações e faz referência gráfica da evolução numérica do problema proposto. O Geogebra é um *software* livre amplamente utilizado para fins educacionais [17]. As construções geradas pelo Geogebra são os *applets* e estes podem ser disponibilizados em um repositório que permite o acesso e utilização sob a licença *creative commons* 2.0. Na página há um formulário *online* com tecnologia *Google Drive* para que o aluno registre suas observações sobre a resolução da atividade, e isso deverá ocorrer com o auxílio do *applet*. Há ainda um *link* de acesso para o *applet* diretamente na versão *web* do Geogebra.

Esta atividade permite comparar e estimar valores numéricos e formas geométricas. Permite ainda relacionar a dinâmica da situação problema e sua evolução gráfica. Trata a área com enfoque na extensão de valores ao infinito e valores limite. A generalização da função ocorre pela análise dos valores e das formas geométricas próprias da análise da dinâmica do objeto. Nesta atividade temos uma circunferência ($C_{A,r}$) de raio unitário ($r = 1$) com centro em A e um polígono P_n, com $n \geq 3$, o número de lados e $0 < l \leq d = 2r$ o comprimento do lado. Esse polígono possui dois de seus vértices contidos na circunferência. A situação-problema consiste em determinar a área máxima, $A(P_n)$, que um polígono P_n assume no interior da circunferência e fora dela à medida que dois de seus vértices contidos na circunferência se distanciam.

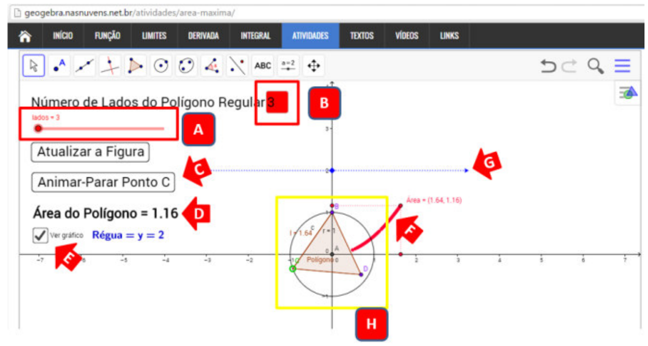

Figura 1. Applet do Geogebra na situação problema.

A Figura 1, apresenta o *applet* da situação-problema do OA – Área Máxima. As descrições seguintes reportam à Figura 1. O *applet* possui uma dinâmica definida pela animação ao clicar no comando, destacado com “C” na figura. Os campos “A” e “B” permitem modificar o número de lado do polígono P_n por deslizamento ou pela entrada numérica respectivamente. No espaço “H” o polígono sofre variação de sua área. Marcando o campo “E” torna-se possível visualizar a evolução da variação da área de P_n em função do lado l - veja “F”. Em “D” tem-se o valor numérico da área do polígono P_n. É possível ainda mensurar a área a partir da régua em “G”.

Na página *web* da atividade, o aluno encontra um espaço para registro, que consiste em um formulário *online* elaborado com tecnologia do Google Drive. O envio dos registros quando feito pelo formulário implica a organização dos dados em uma planilha eletrônica conforme organização feita na estrutura do formulário. Caso o aluno deseje ter em sua tela apenas o *applet*, ele poderá acessar diretamente esse OA pelo Geogebratube (repositório de *applets* do Geogebra) pelo *link* disponível juntamente ao OA – Área Máxima.

É esperado que o aluno consiga construir conhecimentos sobre limite de funções. Para o docente a expectativa é que a partir dos registros dos alunos, ele consiga dimensionar adequadamente a avaliação da aprendizagem, privilegiando a linguagem e a organização de argumentos e implicações resultantes do pensamento, sem deixar de considerar o rigor e a técnica inerentes à matemática.

4. METODOLOGIA

Área Máxima foi uma atividade programada para complementação e aprofundamento de aulas teóricas da disciplina CDI; tratavam do conceito de limite a partir de noções do cálculo de áreas e seu entendimento como uma função. Participaram 15 (quinze) dos 19 (dezenove) alunos matriculados na disciplina. A aceitação para participação da pesquisa ocorreu por termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE). Outros três alunos responderam, mas não haviam autorizado o uso de suas respostas até a elaboração deste texto, tendo seus registros ignorados para esta pesquisa. Houve, pois, uma evasão.

A situação-problema, contida no OA – Área Máxima, está disponível online e fez parte das atividades propostas aos discentes de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. O propósito da atividade para o aluno consistia na construção do conceito de limite a partir da problemática da área máxima; para o docente consistia na obtenção de registros das respostas de discentes após a interação entre aluno e o referido OA. Para o desenvolvimento desta atividade procedeu-se da seguinte maneira:

1) Apresentação do OA e suas funcionalidades. A apresentação foi feita levando em consideração a contextualização da situação-problema e a teoria de limites de funções. Foi disponibilizado no ambiente virtual institucional um vídeo de ajuda e fórum para compartilhamento de informações e comentários.

2) A partir de uma situação-problema de área máxima entre um polígono e um círculo, é solicitado ao aluno que acesse o *link* da atividade e conheça a situação-problema para o propósito da conceituação de limites. O aluno deverá inserir no formulário online os registros de suas observações ao tentar conceituar limites a partir das tentativas de solução à problemática. Essas possíveis soluções poderão ocorrer pela interação entre o aluno e o *applet*.
3) Analisar os registros realizados por alunos na planilha eletrônica de dados do Google Drive. A análise privilegiará conhecer as noções ou conceitos apresentados pelos alunos sob o enfoque da Epistemologia Genética.

A atividade foi proposta no semestre letivo 2016.1 aos alunos do curso de Licenciatura em Ciências Naturais.

5. ANÁLISE

A pesquisa foi realizada considerando a base teórica da Abstração Reflexionante de Jean Piaget. Nesta pesquisa analisaremos os registros de respostas enviados pelos alunos no OA. Os dados foram agrupados em uma planilha eletrônica no Google Drive.

5.1. Análise dos Registros

Nesta pesquisa analisaremos 15 registros oriundos das respostas dos alunos aos questionamentos contidos da atividade Área Máxima. O primeiro questionamento era se polígono P_n tem área máxima, se sim, era para descrever o processo para obtenção da área máxima. Se a resposta fosse negativa, então deveriam justificar. Todos os registros responderam positivamente, afirmando que o polígono apresenta área máxima. Em primeira análise foi possível concluir que consideraram a situação I (P_n interno à circunferência $C_{A,r}$) e/ou II ($P_n \cap C_{A,r} = \{B,C\}$) nos registros assim como descreve alguns registros: "*Sim, o processo para a obtenção da área máxima do polígono regular, ocorre quando o ponto C inscrito no círculo tende a se distanciar do ponto B, assim o valor da área do polígono vai tendendo a ser cada vez maior até atingir o valor máximo possível, que será o valor l=2 [...]"* e nesse registro o aluno considerou um valor de *n* fixo, fazendo o comprimento do lado tender ao valor máximo, *l*=2. O mesmo pode ser observado em outro registro: "*Sim, pois observamos que ao se distanciar de B, o vértice C, estabelece uma área para l=2, sendo esta a [Área] máxima que atinge, não importando a quantidade n do polígono [...] e quando eles estão se aproximando, tende para zero.* ", no entanto, se fizer $n \to \infty$, a área $A(P_n) \to \infty$.

O complemento dessa pergunta solicitava que fosse descrito o processo da obtenção da área máxima, e que isso fosse feito com linguagem matemática de limites, vejam alguns registros: "*Os Pontos {C,D,B} formam um polígono regular inscrito no círculo [...] ocorrendo assim a aproximação e distanciação dos seus lados [vértices] quando os pontos estão se movimentando, e assim vão criando valores reais na área do círculo.*" Nesse registro o aluno não considera a área do polígono tendendo para zero. Um outro registro diz: "*Podemos dizer que l é o ponto máximo da função [A área está em função de l], se b e c estiverem respectivamente em 1 e -1 [r=2]. E ainda podemos notar que para um n maior (n>/= 3) a imagem tende para o infinito*", uma análise quase completa pois não considerou o limite da área do polígono com os vértices na circunferência. No registro: "*No momento em que o polígono com 500 triângulos se encaixa na circunferência, podemos dizer que o lado do triângulo tende ao raio da circunferência, e que a área do polígono tende a pi (3,14), como lim f(x)=L quando x tende a a, sendo assim podemos dizer que o raio é o limite dos lados e que a circunferência é o limite da área do polígono regular*." Neste registro fica evidente a relação que o aluno faz entre a área do polígono e uma função, cujo domínio são os valores que *l* pode assumir.

A segunda parte das perguntas versava sobre as relações possíveis entre o polígono, a circunferência e o círculo. Perguntados sobre a existência da relação entre o círculo e a área máxima do polígono, os alunos afirmaram existir a relação, eis alguns registros: "*Sim. Pois para obter a área máxima, o polígono tem que está com dois vértices dentro do círculo, ou seja, o círculo determina a área máxima do polígono.* ", reconhecendo a relação de dependência e limitação da área pelo comprimento do lado que é uma corda da circunferência, "*SIM. Quando maior o número de lados do polígono inscritos no círculo, maior será a sua área máxima, sendo maior a área do polígono também, quanto maior o número de lados, mais próximo de uma circunferência será seu formato.* ", não considerou que a área do polígono terá valor limite para um *n* fixo. O registro: "*Sim, pois quanto maior for o número de lados do polígono inscrito no círculo, aumentará seu tamanho fazendo com que o polígono se assemelhe a um círculo.*". Assim como o anterior consideram que o limite da área do polígono inscrito é a área do círculo. Diferentemente, o registro: "*Os pontos inscritos na circunferência estão se movendo, criando áreas máximas e mínimas, os pontos no círculo tendem uns aos outros, criando assim um limite máximo e mínimo para o polígono regular.* ", não considera a situação citada anteriormente, descreve o processo em que a área possui valor limite, limite este máximo e mínimo, com o valor do lado $0 < l \leq 2r = d = 2$.

5.2. Conhecimento Matemático do OA Área Máxima

Todo objeto de aprendizagem em essência tem conhecimento associado [10], [4], [9]. A análise é feita considerando dois aspectos: I) P_n interno à circunferência $C_{A,r}$; II) $P_n \cap C_{A,r} = \{B,C\}$. O conhecimento matemático associado é:

C1. Se $n \to \infty$, então $A(P_n) \to \infty$.

C2. A variação da área $A(P_n)$ é em função de l.

C3. l varia à medida que C se distancia de B.

C4. O comprimento de l é $0 < l \leq d = 2r$.

C5. Se tivermos um número de lados definido $n \geq 3$, então $A(P_n) \to L$, e L é área máxima se $l \to 2r = d = 2$, pois $0 < l \leq d = 2r$. $C5 \equiv \sim C6$.

C6. Se tivermos um número de lados definido $n \geq 3$, então $A(P_n) \to L$, e L é área mínima, se $l \to 0$, pois $0 < l \leq d = 2r$. $C6 \equiv \sim C5$.

C7. Considerando a $C_{A,r}$, a área $A(P_n)$ é máxima no interior da circunferência se os vértices de P_n estão contidos na circunferência e equidistantes na medida de $\frac{C}{n}$.

C8. Se $\frac{C}{n} \to 0$, então $A(P_n) \to \pi r^2$.

C9. Relacionar a função $A(P_n)$ com seu gráfico e analisar a área máxima como limite dessa função.

Esta análise considerará cada um desses conhecimentos presentes ou não nos registros.

ID	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	R1	R2	R3
M1		x	x	x	x	x				R1	R2	
M2		x	x	x		x					R2	
M3		x	x					x				
M4	x	x	x	x	x	x				R1	R2	
M5		x	x		x	x				R1	R2	
M6	x	x	x		x	x		x		R1	R2	R3
M7		x	x		x	x				R1	R2	
M8			x	x				x				
M9	x		x		x	x						
M10	x	x			x	x		x	x	R1	R2	R3
M11		x	x									
M12		x	x			x		x			R2	
M13		x	x		x	x				R1	R2	
M14		x	x	x	x	x				R1	R2	
M15		x	x	x	x	x		x		R1	R2	

Tabela 1: Conhecimento matemático contido nos registros

Na Tabela 1, foram agrupados os conhecimentos apresentados nos registros. O agrupamento destaca os conhecimentos que cada aluno expressou ao efetuar registros de respostas no OA.

Foram elencados 9 (nove) conhecimentos matemáticos associados ao OA Área Máxima, destes destacamos algumas relações de implicação. As implicações estão centradas em duas ideias fundamentais: o conceito de função e o conceito de limite. As relações são as seguintes: R1 ($C5 \to C2$), R2 ($C6 \to C2$), R3 ($(C7 \vee C8) \to (C1 \wedge C2)$). Na Tabela 1, destacamos os grupos de alunos que apresentam as relações, $R1 \equiv R2$ e $R3$ apresenta conhecimentos mais elaborados que em $R1$ e $R2$.

6. CONCLUSÕES

Ao término desta pesquisa podemos considerar dois aspectos, um que trata genericamente da utilização direta de tecnologias para fins educacionais e a outra é a objetividade dos resultados observados sobre os mediante análise dos registros. Quanto ao primeiro aspecto é importante destacar a eficiência da associação de tecnologias para fins educacionais. A utilização de tecnologia Google Drive para coleta, acesso e organização de registros de uso de *applets* do Geogebra em ambiente virtual, permitiu aos docentes observar e avaliar a produção docente sob um outro olhar, aquele que expressa suas impressões e tenta organizar suas ideias e construções em texto. Quanto à eficácia das situações-problema pode-se afirmar que propiciaram a mobilização de conhecimento, no entanto, os resultados são tão variados quanto cada indivíduo, e isso é devido às estruturas cognitivas que cada aluno apresentou no processo de interação com os *applets*. Os alunos M6 e M10 conseguiram demonstrar as três principais implicações sobre os conhecimentos que tratam cada situação problema. Um grupo composto pelos alunos M1, M4, M5, M7, M13, M14 e M15 apresentaram registros que levaram a concluir que conseguiram realizar conclusões relativas às implicações R1 e R2. Já os alunos M2 e M12 apresentaram a relação $R2$. Nos registros dos alunos M3, M8, M9 e M11 não foi possível identificar nenhuma das principais relações de implicação. Apresentaram implicações elementares mais simples, conhecimentos isolados, não sendo possível identificar a realização de coordenações de operações com essas implicações básicas para obter outras mais complexas e elaboradas sobre funções, limites e variação de área. No entanto, acreditamos que um aprofundamento desses registros pode ser feito utilizando entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano, o que implicaria em fazer melhores inferências sobre as ações e registros realizados a partir da interação com as situações-problema.

7. AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com apoio financeiro da Fundação de Amparo e Apoio à Pesquisa do Estado do Maranhão.

8. REFERENCIAS

[1]. AEBLI, Hanss. **Didática Psicológica: aplicação á didática da psicologia de Jean Piaget**. 3. ed. Atualidades pedagógicas. v.103. São Paulo: Editora nacional, 1978, 196 p.

[2]. BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999

[3]. BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento.** 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012. 200 p.

[4]. BIZELLI, Maria Helena Sebastiana Sahão; FISCARELLI, Silvio Henrique; BARROZO, Sidineia. Tecnologia digital aplicada no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. In: Congresso de inovação, tecnologia e sustentabilidade, 1., 2010,

Brusque. **Anais... .** Brusque: Unifebe, 2010. p. 1 - 10. Disponível em: <http://sites.unifebe.edu.br/~congressoits2010/artigos/artigos/013_-_TECNOLOGIA_DIGITAL_APLICADA_NO_ENSINO_E_APRENDIZAGEM_DO_CALCULO_DIFERENCIAL_E_INTEGRAL.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2014.

[5]. CARNEIRO, Mára Lúcia Fernandes. SILVEIRA, Milene Selbach. Objetos de Aprendizagem como elementos facilitadores na Educação a Distância. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 4, 2014, p. 235-260. Editora UFPR. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nspe4/0101-4358-er-esp-04-00235.pdf>. Acesso em: 10 de julho de 2016.

[6]. DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico:** descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artmed, 2002. 267 p. Tradução de Fátima Murad.

[7]. DOLLE, Jean-marie. **Princípios para uma pedagogia científica.** Porto Alegre: Penso, 2011. 199 p. Tradução: Sandra Loguércio.

[8]. FAGUNDES, Léa da Cruz; SATO, Luciane Sayuri; MAÇADA, Débora Laurino. **Aprendizes do futuro:** as inovações começaram. Brasília: Mec/seed/proinfo, 1999. 95 p. (Coleção Informática para a mudança na Educação). Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003153.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2015.

[9]. FERNANDES, Flávia Gonçalves. et. al. Sistema para Cálculo Diferencial e Integral – SCDI. In: Anais dos Workshops do CBIE 2012. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wcbie/article/view/1663/1426>. Acesso em: 01 de junho de 2016.

[10]. KESSLER, Maria Cristina. Introduzindo objetos de aprendizagem no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral. **Renote: Novas Tecnologias na Educação,** Porto Alegre, v. 6, n. 1, p.1-10, mar. 2008. Semestral. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/14687/8595>. Acesso em: 12 set. 2014.

[11]. LAFUENTE, Ángel Contreras de; ARMENTEROS, Manuel García; MOLL, Vicenç Font. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. **Bolema,** Rio Claro, v. 26, n. 42, p.667 - 669, abr. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42b/13.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2015.

[12]. MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993. 169 p.

[13]. NOTARE, Márcia Rodrigues. BEHAR, Patricia Alejandra. Aprendizagem e Comunicação Matemática em Ambientes Virtuais: Uma Experiência com o Cálculo Diferencial. In: Anais do SBIE 2009. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/1119/1022>. Acesso em: 01 de junho de 2016.

[14]. PIAGET, Jean et al. **A Tomada de Consciência.** São Paulo: Edições Melhoramentos, 1977. 211 p. Tradução: Edson Braga de Souza.

[15]. PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

[16]. REZENDE, Wanderley Moura. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. In: MACHADO, Nilson José; CUNHA, Marisa O. (Org.). **Linguagem, Conheciemento, Ação:** ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2003. Cap. 19. p. 313-336. (Coleção Ensaios Transversais).

[17]. ROCHA, Elizabeth M. et. al. Uso do Geogebra nas aulas de Matemática: reflexão centrada na prática. In: Anais do SBIE 2008. p. 776-784. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/766/752>. Acesso em 01 de junho de 2016.