

## “Reinventar la rueda”.

# Modelo de enseñanza para el aprendizaje de la Matemática

Reinaldo Vallejos  
Universidad Federico Santa María  
Avenida España 1680, Valparaíso, Chile.  
+56 32 2654207  
reinaldo.vallejos@usm.cl

Daniela Vásquez  
Universidad Federico Santa María  
Avenida España 1680, Valparaíso, Chile.  
+56 32 2652609  
daniela.vasquezl@usm.cl

## RESUMEN

Este artículo describe un nuevo modelo de enseñanza para el aprendizaje de las propiedades y teoremas de los objetos matemáticos en el aula. Surge a partir de la necesidad de responder a las actuales demandas que se plantean a la educación y es coherente con la perspectiva social constructivista del aprendizaje. El método está compuesto por 7 etapas: la primera consiste en el planteamiento de la situación problemática a los estudiantes, que consiste en reconstruir una propiedad o teorema; la segunda trata de la comprensión por parte del estudiante de la situación; la tercera en la búsqueda de estrategias de solución de los estudiantes, donde se recomienda que trabajen inicialmente de manera individual, a través del uso de casos particulares para luego incorporarse a equipos de trabajo en donde puedan discutir los hallazgos encontrados; la cuarta etapa plantea la evaluación y adecuación de las estrategias elaboradas, para su posterior utilización en la etapa 5, donde se plantea la resolución del problema mismo. Las últimas etapas del modelo incluyen la discusión de los hallazgos de los estudiantes y la posterior redacción, en los términos más generales posibles de la propiedad o teorema.

## Palabras claves

Modelo, Enseñanza, Aprendizaje, Matemática, Constructivismo.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los cambios sociales dentro de los procesos de globalización han generado una serie de demandas a los distintos sectores de la sociedad, entre ellos la educación. El continuo desarrollo de las tecnologías de la información y comunicación (TICS) ha producido y produce, constantemente, una gran cantidad de información, dificultando la tarea de conocer eficientemente toda la información existente. Se configura así un proceso continuo que implica un desaprender constante, donde quedan obsoletos en poco tiempo algunas técnicas, procedimientos o conocimientos.

En función de lo anterior, actores educativos como los docentes, están llamados a generar habilidades en los estudiantes más allá de la apropiación de cúmulos de información, habilitándolos para producir conocimiento[1,3], además de procesar y analizar información proveniente de distintos medios. Lo anterior, exige dejar de lado la tradicional clase expositiva, para dar pasos a nuevas metodologías, materiales, y dinámicas que permitan a los estudiantes desarrollar destrezas para actualizar constantemente su conocimiento.

Se debe promover la acción, indagación, creación, así como la comunicación de los individuos. El contraste de experiencias, el diálogo y la reflexión constante en el aula. Formar alumnos conscientes de lo que saben, de cómo y cuándo utilizar su conocimiento[3], capaces de crear estrategias, establecer relaciones, manejar grandes y variados tipos de información, de

responder a la sociedad actual e integrarse activamente a ella, tomando decisiones en función de tareas y desafíos propuestos.

En este sentido, el desarrollo de la matemática al interior del aula debe plantearse bajo la convicción que el "conocer" o "saber" matemáticas es más que repetir las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos y saber aplicarlos en variados contextos. La persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver los problemas que han permitido construir las propiedades y teoremas de la matemática misma.

De esta manera, desarrollar competencias en el área de la matemática conlleva dar paso a nuevas metodologías, materiales y formas de interactuar dentro del aula, que permitan a los estudiantes: **analizar situaciones problemáticas**, determinando regularidades o patrones y nexos entre los elementos presentados de un problema; **verbalizar** conjeturas, formas de resolver problemas, a través de diversos lenguajes y símbolos; **elaborar estrategias de solución de problemáticas**, partiendo de casos pequeños y concretos, determinando una gama de caminos fundamentados tanto en la comprensión del problema bajo análisis, como en definiciones, teoremas y axiomas matemáticos ya conocidos; **validar estrategias o relaciones encontradas**, a partir de casos particulares, realizando adecuaciones si fuera necesario; **resolver problemas o situaciones planteadas**, a través de un método, dando respuesta en función del contexto del problema; **generalizarlos hallazgos de manera formal**, dando paso a propiedades matemáticas aplicables más allá del contexto específico del problema resuelto; y **publicar los resultados**.

Como resultado de este proceso el estudiante llega a tener una visión de la matemática como una ciencia que es producto de la respuesta natural y espontánea de la mente humana a los problemas que se presentan en el entorno[2], junto con un conocimiento de las interrogantes que han permitido desarrollarla.

Este artículo presenta un modelo de enseñanza para el aprendizaje de la matemática, aplicable a todos los marcos de enseñanza, que permite al estudiante re-crear el conocimiento y desarrollo de la matemática misma, y responder a las necesidades del contexto actual educacional en el cual nos encontramos.

## 2. MODELO DE ENSEÑANZA PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

### 2.1 “Reinventar la rueda”

Un modelo es una representación de la realidad que posee: dimensiones significativas y esenciales de la misma; un objetivo; una relación con la teoría; y está abocado a la acción. El modelo “Reinventar la rueda” que se propone en este artículo, tiene relación con el desarrollo del aprendizaje en una parte

fundamental de la enseñanza de las matemáticas: **la presentación de las propiedades y teoremas de los objetos matemáticos en el aula**. Está focalizado en la transformación de cómo estos son presentados en el aula, posee relación directa con las teorías constructivistas del aprendizaje y tiene por finalidad responder a las actuales demandas que se realizan a la educación.

Se parte del supuesto que para presentar tales elementos a los estudiantes (propiedades, teoremas de los objetos matemáticos), es preciso dejar de lado el carácter tradicional a través del cual han sido entregados, donde se puede observar que: **se presentan como un conocimiento acabado, el alumno las utiliza para resolver ejercicios reproductivos y problemas; no se hace alusión alguna a su proceso de construcción o bien es el docente quien presenta la demostración matemática de dicha propiedad o teorema**. Al contrario de lo anterior, el modelo plantea que para desarrollar un proceso de aprendizaje en el aula es necesario situar al estudiante en la problemática de re-construir dicha propiedad, a partir de su conocimiento previo, el cual puede haber sido desarrollado en el mismo curso, en su desarrollo estudiantil o en su vida cotidiana.

Para desarrollar lo anterior, el estudiante inicialmente aborda la problemática a partir de casos particulares. En este punto su tarea consistirá en : **analizar los casos particulares**, determinado regularidades o patrones y nexos entre los elementos presentes; **elaborar estrategias de solución de los casos particulares**, estableciendo una gama de caminos fundamentados en definiciones, teoremas y axiomas matemáticos ya conocidos, **verbalizar**, conclusiones, formas de resolver, a través de diversos lenguajes y símbolos, para finalmente **validar la estrategia o relación encontrada en los casos particulares**, realizando adecuaciones si fuera necesario. Lo anterior tiene por consecuencia un método de solución al problema, que permite **generalizar** los hallazgos dando paso a la propiedad matemática en cuestión.

En este sentido, desarrollar matemática al interior del aula, conlleva a colocar a los estudiantes en la situación de reinventar la rueda, es decir, colocarlos en la problemática de re-crear las propiedades y teoremas que han permitido su construcción.

## 2.2 Etapas

A continuación se describen cada una de las etapas del modelo, haciendo hincapié en el rol del docente, el rol del alumno, en la posibilidad de interacción de los estudiantes, en la evaluación del proceso, las metodologías y materiales que pueden utilizarse en su desarrollo. La figura 1 esquematiza las etapas del modelo.

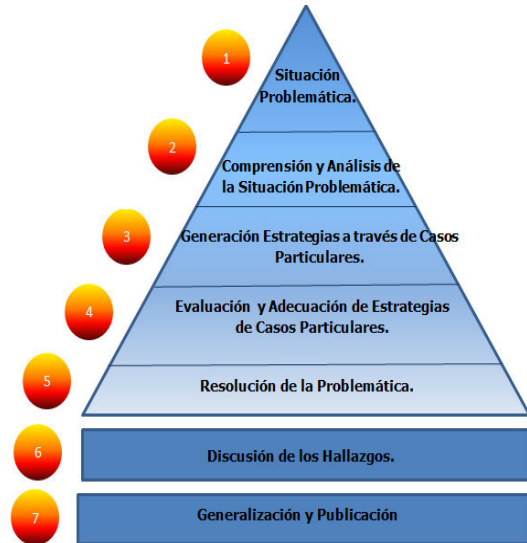


Figura 1. Etapas del modelo “Reinventar la rueda”.

Cabe destacar que en el desarrollo de la tarea de reconstrucción puede presentarse que: no se evidencie algunas de las etapas señaladas, así como también es posible que algunas de ellas se den de manera simultánea. Lo anterior dependerá del problema que se intente resolver (de la propiedad o teorema), además del dominio de los estudiantes en la temática y en la resolución de este tipo de situaciones. A nivel de los estudiantes puede evidenciarse la misma situación: no necesariamente un estudiante deberá pasar por cada una de las etapas para conseguir el objetivo, es muy posible que sin pasar por ninguna de ellas consiga de manera directa dar con la propiedad o teorema.

### 2.2.1 Etapa 1: Situación de Problemática.

En esta etapa el estudiante se enfrenta a la situación problemática de reconstruir una determinada propiedad o teorema matemático.

La reconstrucción será realizada por el estudiante a través del conocimiento que ya posee, el cual, como se señaló, puede tener sus orígenes en el mismo curso, en su desarrollo estudiantil o en su vida cotidiana. Así, resulta fundamental verificar previamente que los estudiantes posean los conocimientos[1] y los elementos necesarios para desarrollar la problemática evitando que se presenten obstáculos insolubles en el desarrollo y comprensión de la misma.

Porejemplo considere la **propiedad de las potencias para multiplicar potencias de igual base**. La propiedad establece que para multiplicar potencias de igual base, se debe conservar la base y sumar los exponentes. En este caso, la situación problemática en el aula a los estudiantes podría ser planteada de la siguiente manera:

$$a^n \cdot a^m = ?^1$$

Para ello los estudiantes deberían conocer y manejar la definición de potencia, siendo:  $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ , ( $n$  veces), es decir multiplicar por sí mismo  $n$  veces.

<sup>1</sup>Las restricciones para  $a$ ,  $m$ ,  $n$  en términos de conjuntos dependen del nivel en donde se esté trabajando y el conocimiento de los estudiantes sobre conjuntos numéricos

### 2.2.2 Etapa 2: *Comprensión y Análisis de la Situación Problemática.*

En esta etapa el alumno trata de comprender el desafío propuesto en relación: **al contexto en el cual éste se desarrolla** (comprender la situación que allí se plantea); **la información que entrega** (analiza que datos posee y cuáles no); **el objetivo que se persigue** (cuál es el resultado esperado); **la relación que posee con los conocimientos desarrollados en clases** (establece relaciones entre los datos que entrega el problema y los conocimientos, definiciones, teoremas que han sido desarrollados en clases o en cursos anteriores).

El alumno puede realizar preguntas al docente con la finalidad de mejorar su entendimiento de la situación planteada (elementos que son poco claros para su comprensión o que le causan inquietud).

Por su parte el docente, debe monitorear el proceso y verificar las comprensiones de los estudiantes respecto a la situación descrita. Para desarrollar lo anterior puede plantear a los estudiantes preguntas que le permitan alcanzar el nivel de comprensión deseado.

En este nivel es recomendable que el estudiante trabaje de manera individual para evitar la inducción de pensamiento, elaborando así su propia representación y comprensión del problema. Por otro lado, es posible el uso de materiales como libros, cuadernos, computador, etc., con el cuidado que este material no proporcione la respuesta ni el desarrollo de la problemática planteada.

### 2.2.3 Etapa 3: *Búsqueda de estrategias a través de Casos Particulares.*

Una vez comprendido el problema con todos sus elementos, el trabajo de los estudiantes consiste en buscar una solución a la situación planteada.

Con la finalidad de abordar la situación es necesario, en primer lugar, que resuelvan el problema para casos particulares, estableciendo relaciones entre los elementos presentes, haciendo uso del conocimiento previo que se posee, de los elementos allí expuestos.

Cabe destacar que dichos casos particulares deben ser determinados por los estudiantes, y bajo ningún punto de vista inducidos por el docente. Para ello, previamente a esta clase, se debe trabajar con los estudiantes en la resolución de problemas a través de casos particulares para que este procedimiento no constituya una dificultad u obstáculo en sí mismo.

En esta etapa se sugiere que los estudiantes trabajen en dos momentos: de manera individual y luego en equipos de trabajo. Los estudiantes se incorporarán al trabajo con sus pares una vez que posean alguna idea de estrategia de resolución al problema. En este sentido es tarea del docente determinar este momento a partir del monitoreo del proceso realizado.

En los equipos de trabajo se espera que los estudiantes discutan sus comprensiones del problema, dudas, inquietudes, elecciones y procedimientos, estrategias de resolución, etc. [4]. Se debe obtener como resultado de este proceso una estrategia de solución grupal para casos particulares. Dicha estrategia determinada por el grupo puede ser producto de la idea de uno de los integrantes, de la integración de las ideas de todos o alguno de los integrantes o una creación propia del grupo que surge a partir de la discusión.

Se sugiere que los grupos no excedan un máximo de 3 personas, aunque es admisible también que existan alumnos que trabajen de manera individual. Además que su conformación sea realizada por el docente en función de las diferencias de comprensiones en torno al problema planteado, de manera tal que entre los integrantes del equipo pueda darse una suerte de andamiaje.

Durante el proceso, el docente debe proporcionar aclaraciones a los estudiantes nuevamente a través de preguntas que les permitan la reflexión de lo desarrollado. Es importante no entregar las respuestas a los estudiantes, así como también no señalar si el camino escogido es correcto o no.

Para ejemplificar esta etapa utilizaremos la propiedad de los Logaritmos que establece que:

$$\log_a b^c = c \log_a b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a \neq 1$$

En este caso, el objetivo de la clase es que los estudiantes establezcan cuánto es  $\log_a b^c = ?$

El docente debe cerciorarse previamente que los alumnos manejen la definición de logaritmo, la resolución de ecuaciones exponenciales, y consecuentemente conozcan las potencias.

Para abordar la situación los estudiantes deben partir de casos particulares como por ejemplo calculando para casos tales como:  $\log_2 2^3$ ,  $\log_3 9^2$ ,  $\log_{\sqrt{3}} 3^3$  para establecer relaciones entre los elementos que allí aparecen.

### 2.2.4 Etapa 4: *Evaluación y Adecuación de las Estrategias de Casos Particulares.*

La etapa de evaluación consiste en que los alumnos determinen el grado de eficiencia y eficacia de la estrategia elaborada. Los alumnos deben validar su estrategia probando si permite establecer resultados, tanto para casos simples como aquellos que posean una mayor complejidad, en caso de encontrar limitaciones se deben realizar las adecuaciones pertinentes, revisando el proceso mismo o cambiando por completo la estrategia encontrada.

Es tarea del docente realizar preguntas a los estudiantes que orienten la reflexión de la validez de la estrategia ideada.

### 2.2.5 Etapa 5: *Resolución de la Problemática.*

Una vez determinada la eficiencia y eficacia de la propuesta de estrategia elaborada, los alumnos obtienen por resultado un método que les permita resolver sistemáticamente la problemática planteada al inicio de la clase.

### 2.2.6 Etapa 6: *Discusión de los Hallazgos.*

Organizados por el docente, los alumnos presentan al resto de sus compañeros los hallazgos encontrados con sus equipos de trabajo, exponen tanto la estrategia como el método de solución del problema y los elementos utilizados. Es tarea del docente en esta etapa realizar preguntas a los estudiantes que permitan comprender las elecciones tomadas y el sustento matemático que se encuentra tras ellas, llamando a una discusión de lo expuesto.

Presentadas la variedad de estrategias y métodos encontrados, el docente debe llevar a la reflexión de los estudiantes de las mismas, realizando preguntas orientadas a la comparación de

estrategias según la eficacia, sustento matemático y posibilidad de dar respuesta al problema en toda la variedad de posibilidades.

A partir de lo anterior, la discusión generada en el aula debe enfocarse hacia la búsqueda de la mejor estrategia y metodología, la que puede surgir como la elección de una de las planteadas, como la integración de elementos de ellas, o como la elaboración de nuevas estrategias y/o metodologías.

### 2.2.7 Etapa 7: Generalización y Publicación.

A partir de lo anterior el docente lleva a los estudiantes a una generalización del método de solución encontrado, permitiendo a los estudiantes establecer la propiedad o teorema matemático planteado al inicio de la clase. Es preciso, además, construir con los estudiantes la demostración de dicha propiedad o teorema.

Una vez acabado el proceso, descrito anteriormente, los estudiantes deben documentar los hallazgos obtenidos haciendo publicación de ellos por ejemplo en la página web del curso.

## 2.3 Marco Teórico

El modelo expuesto se encuentra basado en el constructivismo contemporáneo y las teorías que se han desarrollado en torno a él.

Dicha corriente pedagógica plantea como idea central la construcción del conocimiento por parte del estudiante llamando a un cambio de roles entre él y docente al interior del aula. El docente debe dejar lado su carácter tradicional de transmisor de conocimientos[1] y protagonista del proceso para convertirse en un facilitador y guía[1,3,5], el estudiante en cambio debe dejar su rol de participante pasivo[1,5] del proceso de aprendizaje para constituirse en el protagonista del mismo.

Esta construcción del conocimiento debe ser desarrollada por los estudiantes a partir de lo que ya conoce (su conocimiento de la realidad, de los objetos y su experiencia propia), siendo esto la base para desarrollar un aprendizaje significativo al interior del aula[1,3,5]. La información nueva interactúa con la información existente creando nuevas estructuras de aprendizaje, estructuras más amplias que complementan las previas, facilitándose la apropiación de información[1].

En este proceso el docente es el encargado de planificar, diseñar previamente la situación de aula a la cual será enfrentado el estudiante, así como también tendrá la tarea de orientar y monitorear su ejecución evitando proporcionar las respuestas.

Lo anterior sin embargo no lo es todo. Esta corriente señala además la importancia para el desarrollo del aprendizaje de la interacción de los sujetos al interior del aula [1,4].

Según Vygotsky [6], representante de esta corriente, con otros el sujeto es capaz de organizar, orientar su proceso de apropiación y construcción del conocimiento. Habla en su teoría del concepto de Zona de Desarrollo Próximo, el cual define como la distancia entre la capacidad de resolver independientemente un problema,

y la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz[6].

Agrega que cuando un alumno con mayor nivel de dominio enseña a un compañero, si este último se encuentra dentro de su zona de desarrollo próximo, le podrá brindar la ayuda desde un nivel superior pero alcanzable. Es posible que al haber experimentado las mismas dificultades que su compañero en el proceso de aprendizaje, podría saber exactamente dónde focalizar su atención a la hora de enseñarle y por ende brindarle la explicación necesaria que aclare su dificultad. El alumno que enseña al compañero también se ve beneficiado, pues deberá poner en juego todas sus habilidades para lograr la comprensión del otro, redefiniendo sus propias comprensiones e internalizando mejor su conocimiento.

## 3. CONCLUSIÓN

El modelo expuesto tiene la finalidad de constituirse como una herramienta abierta que propicie el desarrollo de la enseñanza para el aprendizaje de la matemática en el aula en todo nivel educativo; se encuentra en concordancia con modelos constructivistas de enseñanza utilizados en la disciplina misma y en otras, y puede ser complementado con otros modelos, y metodologías. Su implementación requiere mucho más tiempo que el utilizado con el modelo tradicional de enseñanza pudiendo afectar la cobertura de contenidos en programas extensos.

## 4. AGRADECIMIENTOS.

Los autores expresan su agradecimiento al financiamiento del proyecto Fondef TIC EDU TE12I1006.

## 5. REFERENCIAS

- [1] Moreira, M. *La teoría del aprendizaje significativo crítico: un referente para organizar la enseñanza contemporánea*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Núm. 31, pp. 9-20, 2012.
- [2] Pecharromán, C. *Naturaleza de los objetos matemáticos: Representación y Significado*. Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y Experiencias Didácticas Núm.31 (3), pp. 121-134, 2013.
- [3] Suárez, Z. *Constructivismo en Educación: Ilusiones y Dilemas*. Revista CAES Vol. 3, No. 1, Costa Rica, 2012.
- [4] Suárez, Z. *Las interacciones en el aula matemática cuando se utiliza el aprendizaje cooperativo como metodología*. Revista CAES Vol. 5, No. 1, pp 176-204. Costa Rica. 2014.
- [5] Viñoles, M. *Constructivismo y conductismo: Modelos pedagógicos con argumentos en la educación comparada*. Revista Electrónica de Ciencias Sociales y Educación Vol. 2 No. 3, pp 7-20. www.revista-humanartes.webnode.es, 2013.
- [6] Vygotsky, L. *Obras escogidas*. Tomos I, III. Editorial Visor, Madrid. 1995.