

Estudo da Linha Elástica através de Planilhas do Excel®

Aniele Taiza de Sousa

Universidade Federal Rural do
Semi-Árido,

Pau dos Ferros/RN, Brasil

aniele.sousa@alunos.ufersa.edu.
br

Agda Maria Castro Marques

Universidade Federal Rural do
Semi-Árido,

Pau dos Ferros/RN, Brasil

agda.marques@alunos.ufersa.ed
u.br

**Paulo Henrique Araújo
Bezerra**

Universidade Federal Rural do
Semi-Árido

Pau dos Ferros/RN, Brasil
paulo.bezerra@ufersa.edu.br

ABSTRACT

The role of Microsoft Excel® in engineering education has become increasingly important, establishing itself as an essential tool for both students and professors. Therefore, the purpose of this study is to demonstrate the use of electronic spreadsheets coded in Excel® to structurally analyze the deflection of fixed beams. For this, we developed four spreadsheets, preserving geometry and material but varying load types, to calculate linear and angular deflections - including their respective maximum values - as well as to plot graphs of the deflected shapes of the beams. The results show the deformed shape of the simulated structural members, in response to its material, geometry, and applied load case. In light of this, we observed that the use of spreadsheets can effectively contribute to enhancing the teaching-learning process of structural analysis.

Author Keywords

Excel®; elastic line; displacements; structure analysis.

ACM Classification Keywords

H.5.1. Multimedia Information Systems: Animations, Evaluation/methodology

H.5.2. User Interfaces: Graphical user interfaces (GUI), Interaction styles

J.2. Physical Sciences and Engineering: Engineering

K.3.1. Computer Uses in Education: Computer-assisted instruction (CAI)

K.3.2. Computer and Information Science Education: Computer science education, Curriculum

RESUMO

O papel do Microsoft Excel® no ensino da engenharia tem se tornado cada vez mais importante, consolidando-se como uma ferramenta essencial tanto para alunos quanto para professores. Sendo assim, o propósito deste estudo é a demonstração do uso de planilhas eletrônicas para analisar estruturalmente a linha elástica de vigas engastadas, utilizando o software Excel®. Para tanto, elaboraram-se quatro planilhas, mantendo-se a geometria e variando-se os tipos de carregamento, para calcular deflexões lineares e angulares -incluindo seus valores máximos em cada caso-, assim como para plotar o gráfico de cada linha elástica. Os resultados obtidos nos gráficos apresentam a configuração deformada da peça em resposta a seu material, sua geometria e a cada caso de carga aplicada. Diante disso, observou-se

que a utilização de planilhas pode contribuir de maneira eficaz para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem na análise de estruturas.

Palavras-chave

Excel®; linha elástica; deslocamentos; análise de estruturas.

INTRODUÇÃO

O Microsoft Excel® tem desempenhado um papel cada vez mais significativo no campo do ensino da engenharia, tornando-se uma ferramenta fundamental para estudantes e professores, haja vista que pode ser utilizado em uma ampla gama de disciplinas e tópicos, desde a análise estrutural e termodinâmica até a otimização de sistemas complexos.

[1], conduziram um estudo em que examinaram as atividades de alunos de diversas disciplinas de engenharia. Suas descobertas apontaram para um grande potencial no uso do software Excel®, uma vez que a análise das tarefas realizadas pelos estudantes evidenciou melhorias no contexto educacional.

[3] visando facilitar a compreensão do conteúdo da disciplina de Teoria das Estruturas, optaram por empregar planilhas eletrônicas para ensinar o Método de Cross. Essas planilhas permitiram que os alunos comparassem os resultados dos exercícios resolvidos de maneira tradicional, evitando operações sucessivas e erros matemáticos, o que segundo os autores, tornou as aulas mais atrativas.

[2], fizeram a utilização do software Excel® como ferramenta educacional para abordar a resolução de treliças planas através do método dos elementos finitos de barras, ilustrando graficamente os esforços de tração e compressão nas barras e o deslocamento dos nós. Ao fim, os autores relataram que o Excel® facilitou os cálculos, auxiliando na compreensão dos alunos sobre o conteúdo abordado.

Contudo, mesmo diante de uma diversidade de estudos relacionados ao uso do software Excel®, é notória a escassez de algoritmos disponíveis na bibliografia que abordem a representação gráfica de linhas elásticas em vigas por meio deste software. Diante deste cenário, o propósito deste estudo é a concepção de planilhas eletrônicas, utilizando o software Excel®, destinadas a calcular a linha elástica de vigas engastadas, com diferentes tipos de carregamentos, ilustrando e apontando os parâmetros de referências e os valores máximos e mínimos.

EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA

Conforme explicado por [4], a linha elástica de uma viga é a representação da trajetória resultante dos deslocamentos verticais dos pontos localizados em sua superfície neutra. Esses deslocamentos acontecem devido ao encurvamento longitudinal que a viga sofre após ser submetida a uma deformação. As características da linha elástica dependem não apenas das propriedades dos apoios, mas também do vão da viga, da sua forma ou seção transversal, do material do qual é feita a viga e dos carregamentos aplicados sobre ela.

Para efeitos de discussão, os autores consideram uma viga que está engastada e possui uma carga concentrada atuando na direção ascendente na sua extremidade livre, conforme ilustrado na Figura 1. Quando essa carga atua sobre a viga, o seu eixo sofre uma deformação em forma de curva, como pode ser observado na Figura 2. Os eixos de referência têm sua origem na extremidade fixa da viga, com o eixo x apontando para a direita e o eixo y apontando para cima. O eixo z está direcionado para fora da figura, em direção ao observador.

Segundo os autores, a deflexão " v " representa o deslocamento na direção vertical (eixo " y ") de qualquer ponto ao longo do eixo da viga (conforme ilustrado na Figura 2). Dado que o eixo " y " é considerado positivo quando aponta para cima, as deflexões também são consideradas positivas quando ocorrem na direção ascendente. Enquanto que o ângulo de rotação " θ " do eixo da viga é definido como o ângulo formado entre o eixo " x " e a tangente à curva de deflexão.



Figura 1. Viga com carga P .



Figura 2. Deformação da viga.

METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste estudo, inicialmente fez-se uma revisão bibliográfica a fim de compreender as características da linha elástica e como ela se comporta em estruturas engastadas isostáticas.

Em seguida, identificou-se as equações matemáticas pertinentes que foram incorporadas à planilha, garantindo uma abordagem precisa e confiável. A estrutura das planilhas foi projetada de forma a abranger diferentes cenários de

carregamento, incluindo cargas concentradas e cargas distribuídas.

Dessa forma, adicionou-se os dados gerais de entrada que caracterizam cada uma das estruturas estudadas, tais como, o carregamento, o módulo de elasticidade, o comprimento, a posição das cargas e a inércia. Com base nesses dados e nas equações, automatizou-se as planilhas, para que realizassem as seguintes funções:

- Calcular a deflexão e rotação máxima da viga;
- Calcular a deflexão e rotação da viga em uma seção destacada;
- Plotar o gráfico da linha elástica contendo as informações obtidas.

A Figura 3 exibe a interface do software, onde os dados de entrada e saída são apresentados em forma de tabela. Este exemplo é específico para o caso em que a viga é engastada com uma carga momento, mas o mesmo procedimento foi seguido para vigas engastadas com carga pontual, carga retangular uniformemente distribuída e carga triangular distribuída, de modo que os resultados podem ser visualizados, respectivamente, nas Figuras 4, 5 e 6.

ENTRADA DE DADOS			
CARGA MOMENTO CONCENTRADO			
Parâmetro	Valor		Unidade
M	1000	Horário	N.m
a _m	—	3	m
MATERIAL E GEOMETRIA			
Parâmetro	Valor		Unidade
E	2000000000		N/m ²
I	3		m
b	0,2		N.m
h	0,4		N.m
I	1,07E-03		N.m
SAÍDA DE RESULTADOS			
Fator de escala			
	—		190
VALORES MÁXIMOS			
ROTAÇÃO θ MÁXIMA	Coordenada X		
	3		m
	Valor		
DEFLEXÃO v MÁXIMA EM EM MÓDULO	1,41E-03		
	rad		
	Coordenada X		
	3		m
	Valor		
2,11E-03			m
SEÇÃO DESTACADA			
Coordenada X	—		3 m
$\theta (x)$	1,41E-03 rad		
$v (x)$	2,11E-03 m		

Figura 3. Interface do software Excel®, com os resultados para carga momento.

ENTRADA DE DADOS			
CARGA FORÇA PONTUAL			
Parâmetro	Valor		Unidade
P	1000	Para baixo	N
a _p	—	1,80	m
b _p	1,20		m
MATERIAL E GEOMETRIA			
Parâmetro	Valor		Unidade
E	2000000000		N/m ²
I	3		m
b	0,2		N-m
h	0,4		N-m
I	1,07E-03		N-m
SAÍDA DE RESULTADOS			
Fator de escala			
—		250	
VALORES MÁXIMOS			
ROTAÇÃO θ MÁXIMA	Coordenada X		
	1,8		m
	Valor		
	7,59E-04		rad
DEFLEXÃO v MÁXIMA EM EM MÓDULO	Coordenada X		
	3		m
	Valor		
	1,82E-03		m
SEÇÃO DESTACADA			
Coordenada X		—	3 m
$\theta(x)$		7,59E-04	rad
$v(x)$		9,11E-04	m

Figura 4. Interface do software Excel®, com os resultados para carga pontual.

ENTRADA DE DADOS			
CARGA DISTRIBUÍDA RETANGULAR			
Parâmetro	Valor		Unidade
q	1000		N/m ²
MATERIAL E GEOMETRIA			
Parâmetro	Valor		Unidade
E	2000000000		N/m ²
I	3		m
b	0,2		N-m
h	0,4		N-m
I	1,07E-03		N-m
SAÍDA DE RESULTADOS			
Fator de escala			
—		12	
VALORES MÁXIMOS			
ROTAÇÃO θ MÁXIMA	Coordenada X		
	3		m
	Valor		
	2,11E-03		rad
DEFLEXÃO v MÁXIMA EM EM MÓDULO	Coordenada X		
	3		m
	Valor		
	4,75E-03		m
SEÇÃO DESTACADA			
Coordenada X		—	3 m
$\theta(x)$		2,11E-03	rad
$v(x)$		4,75E-03	m

Figura 5. Interface do software Excel®, com os resultados para carga retangular uniformemente distribuída.

ENTRADA DE DADOS			
CARGA DISTRIBUÍDA RETANGULAR			
Parâmetro	Valor		Unidade
q ₁	1000		N/m ²
MATERIAL E GEOMETRIA			
Parâmetro	Valor		Unidade
E	2000000000		N/m ²
I	3		m
b	0,2		N-m
h	0,4		N-m
I	1,07E-03		N-m
SAÍDA DE RESULTADOS			
Fator de escala			
—		100	
VALORES MÁXIMOS			
ROTAÇÃO θ MÁXIMA	Coordenada X		
	3		m
	Valor		
	1,58E-03		rad
DEFLEXÃO v MÁXIMA EM EM MÓDULO	Coordenada X		
	3		m
	Valor		
	3,48E-03		m
SEÇÃO DESTACADA			
Coordenada X		—	3 m
$\theta(x)$		1,58E-03	rad
$v(x)$		3,48E-03	m

Figura 6. Interface do software Excel®, com os resultados para carga triangular distribuída.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos a partir da implementação das planilhas eletrônicas desenvolvidas no software Excel®, para o cálculo da linha elástica de vigas engastadas, sob diferentes tipos de carregamentos.

Para ilustrar a eficácia das planilhas, considerou-se inicialmente um exemplo prático de uma viga engastada sujeita a uma carga momento na ponta no sentido horário, conforme consta na Figura 7. A carga momento também pode ser adotada em outra conversão, ou seja, no sentido anti-horário.

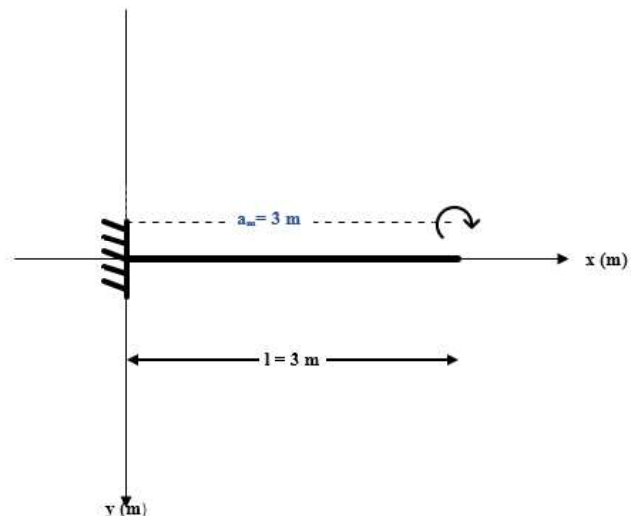


Figura 7. Viga engastada com carga momento.

Para realizar o cálculo da deflexão da viga, aplicou-se a equação 1, por meio da análise de uma discretização composta por 50 pontos distribuídos ao longo da estrutura.

$$v(x) = \frac{Mx^2}{2EI} \quad (1)$$

Essa escolha foi para melhorar a plotagem da curva de deformação pelo Excel® e também para que o máximo obtido pela função (=MÁXIMO) se aproxime do máximo analítico da equação x. Posteriormente, utilizou-se a função (=ABS) para identificar o valor máximo de deflexão obtido ao longo da viga.

De forma análoga, procedeu-se para calcular a rotação da viga, aplicando a equação 2, em cada um dos 50 pontos da discretização.

$$\theta(x) = \frac{Mx}{EI} \quad (2)$$

Novamente à função (=ABS) foi empregue para identificar o valor máximo de rotação ao longo de toda a viga, com base nos 50 pontos analisados. Os resultados dessa avaliação foram posteriormente empregados na criação de um gráfico informativo, que pode ser observado na Figura 8. É importante destacar que optou-se pela adoção do eixo y(m) positivo para baixo, orientado no sentido vertical.

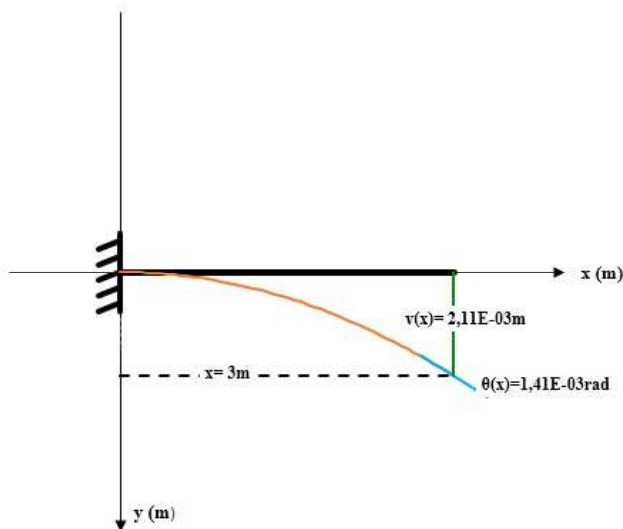


Figura 8. Linha elástica da carga momento na extremidade.

De acordo com os resultados computacionais obtidos por meio do software, para a categoria de carregamento em questão, constatou-se que a seção destacada em uma distância de $x=3\text{m}$, obteve uma deflexão máxima de $v(x)=2,11\text{E-}03\text{m}$ e uma rotação de $\theta(x)=1,41\text{E-}03\text{rad}$. A linha elástica é destacada na cor laranja, a deflexão é indicada em verde, e a cor azul representa a reta tangente que mostra a rotação da viga neste ponto específico. A utilização de

cores nessa escala ajuda a tornar os dados obtidos mais compreensíveis.

A segunda planilha trata de uma viga engastada submetida a uma carga pontual adotada para baixo, conforme ilustrado na Figura 9, embora seja importante notar que essa carga também pode ser ajustada para cima, de acordo com as necessidades do problema.

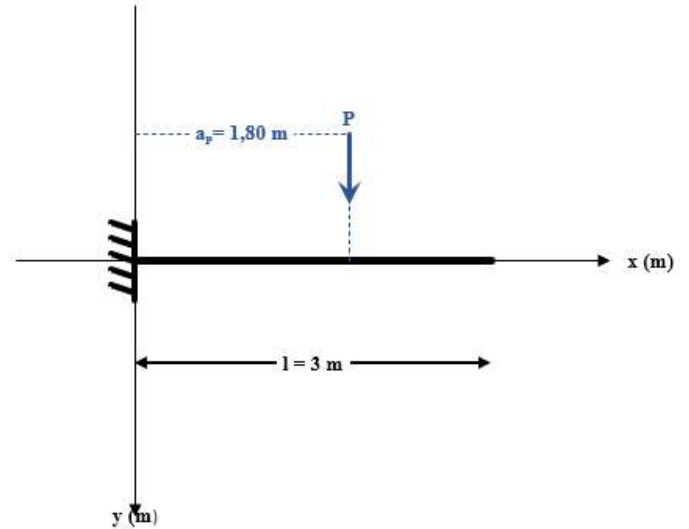


Figura 9. Viga engastada com carga concentrada.

A planilha foi automatizada de maneira análoga ao exemplo anterior. Todavia, neste caso, foram utilizadas para o cálculo da deflexão as seguintes equações:

$$v(x) = \frac{Px^2}{6EI} (3a_p - x), \text{ para } 0 \leq x \leq a_p \quad (3)$$

$$v(x) = \frac{Pa_p^2}{6EI} (3x - a_p), \text{ para } a_p \leq x \leq l \quad (4)$$

Quanto a rotação, utilizou-se as equações:

$$\theta(x) = \frac{Px}{2EI} (2a_p - x), \text{ para } 0 \leq x \leq a_p \quad (5)$$

$$\theta(x) = \frac{Pa_p^2}{2EI}, \text{ para } a_p \leq x \leq l \quad (6)$$

Os resultados alcançados para a categoria de carregamento em foco revelaram que na seção destacada, localizada a uma distância de $x=1,8\text{m}$, a deflexão máxima foi medida em $v(x)=9,11\text{E-}03\text{m}$, enquanto a rotação atingiu $\theta(x)=7,59\text{E-}04\text{rad}$. No que diz respeito à representação visual das informações, a mesma codificação de cores mencionada na Figura 8 foi mantida. Conforme a variação dos parâmetros de a_p , a curva da linha elástica (Figura 10) sofre alterações correspondentes.

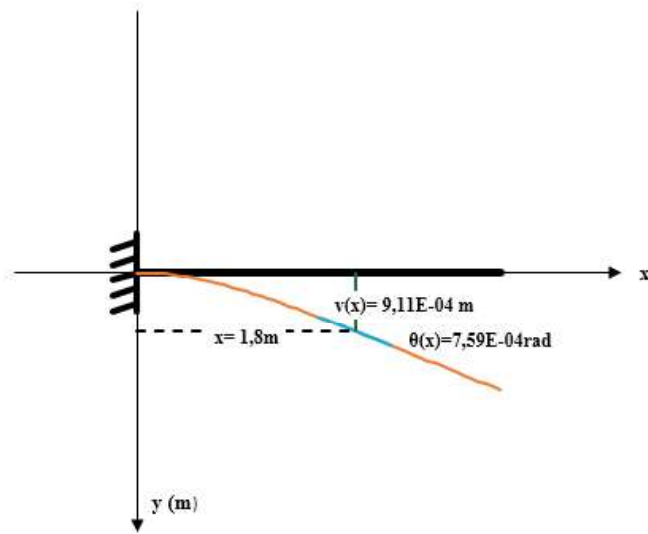


Figura 10. Linha elástica da carga concentrada.

A penúltima planilha, trata de uma viga engastada com carga retangular uniformemente distribuída, de acordo com o que ilustra a Figura 11.

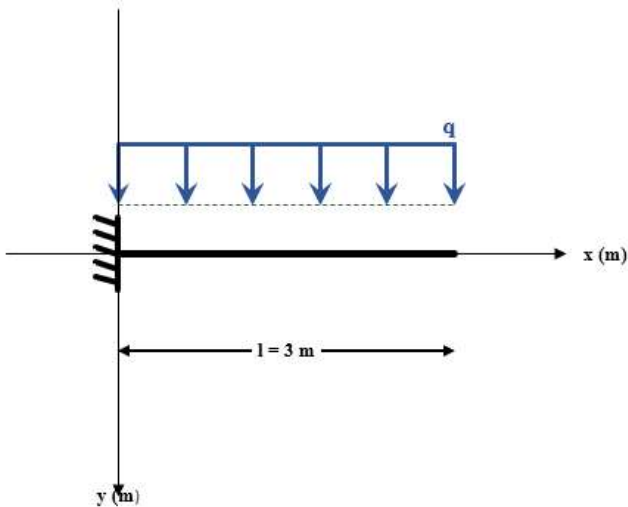


Figura 11. Viga engastada com carga retangular uniformemente distribuída.

Para este exemplo, utilizou-se no cálculo da deflexão a equação 7 e para a obtenção da rotação empregou-se a equação 8.

$$v(x) = \frac{qx^2}{24EI} (6l^2 - 4lx + x^2) \quad (7)$$

$$\theta(x) = \frac{qx}{6EI} (3l^2 - 3lx + x^2) \quad (8)$$

Com base nas equações e utilizando 50 pontos de discretização, da mesma forma dos demais exemplos, foi calculado que na seção destacada, localizada a uma distância de $x=3m$, a deflexão máxima foi de $v(x)=4,75E-03m$

enquanto a rotação foi de $\theta(x)=2,11E-03rad$, sendo que as cores empregadas na Figura 12, que representa a linha elástica do referido caso, também seguem a mesma variação adotada para os demais gráficos.

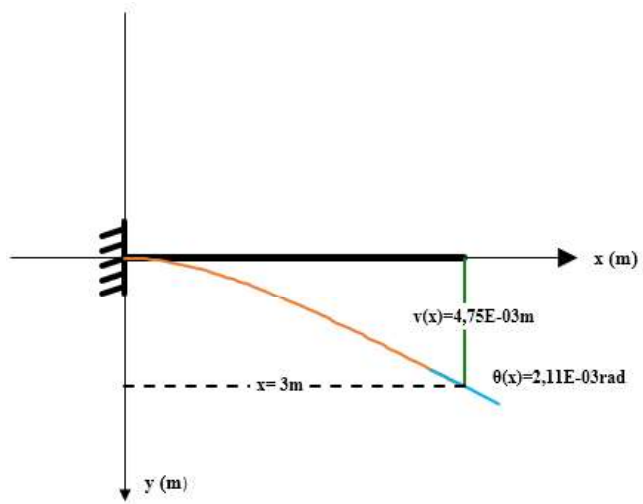


Figura 12. Linha elástica da carga retangular uniformemente distribuída.

Por fim, de maneira similar, elaborou-se uma planilha com um exemplo de uma viga engastada com carga triangular distribuída, conforme apresentado na Figura 13.

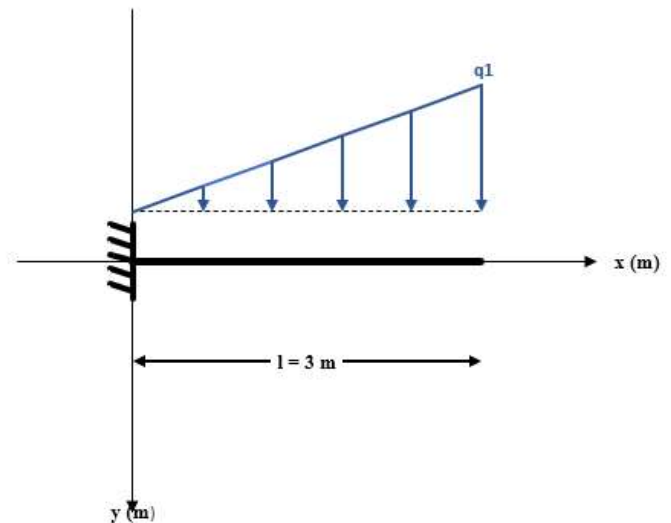


Figura 13. Viga engastada com carga triangular distribuída.

Neste caso, as equações utilizadas para a obtenção da deflexão e da rotação, correspondem respectivamente, as equações 9 e 10.

$$v(x) = \frac{q_1 x^2}{120EI} (20l^3 - 10l^2 x + x^3) \quad (9)$$

$$\theta(x) = \frac{q_1 x}{24EI} (8l^3 - 6l^2 x + x^3) \quad (10)$$

Segundo os resultados gerados pelo software, no exemplo de carregamento apresentado na Figura 14, foi observado que na seção destacada a uma distância de $x=3\text{m}$, a deflexão máxima foi registrada em $v(x)=3,48\text{E-}03\text{m}$, e a rotação foi de $\theta(x)=1,58\text{E-}03\text{rad}$. As tonalidades utilizadas na Figura 14, correspondem às empregadas na Figura 8.

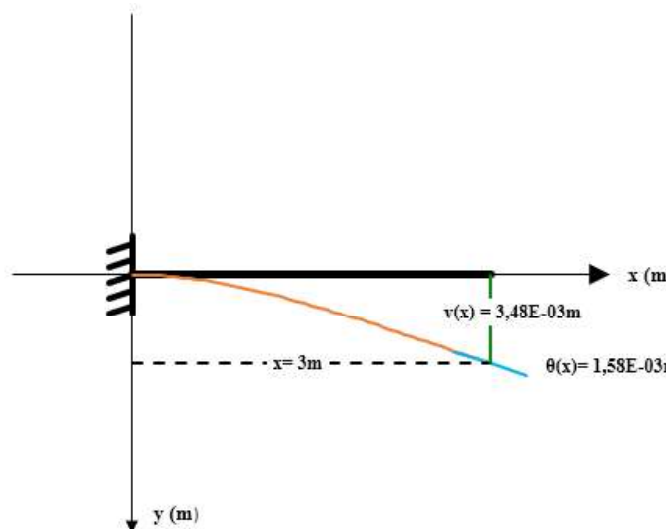


Figura 14. Linha elástica da carga triangular distribuída.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo em questão, buscou fornecer uma ferramenta prática e eficaz para engenheiros e projetistas estruturais, permitindo a análise rápida e precisa do comportamento das vigas sob carga.

Ambos os resultados conquistados nos gráficos, indicam a deformação do material em resposta à carga aplicada. A representação gráfica da linha elástica permite a avaliação da segurança da estrutura, garantindo que esta permaneça dentro dos limites de elasticidade, evitando deformações irreversíveis ou falhas.

Dessa forma, as planilhas não apenas produziram resultados válidos, mas também criaram uma representação da linha elástica, revelando os valores máximos de deflexão e rotação que ocorrem na estrutura deformada. Essa representação visual possibilita a visualização do comportamento da estrutura sob diferentes cargas, o que, por sua vez, auxilia na compreensão das distribuições de tensão e deformação na estrutura, permitindo a identificação de áreas críticas que podem requerer reforço.

Portanto, é possível afirmar que a utilização de planilhas contribui de maneira eficaz para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem na análise de estruturas. Os estudantes que incorporam essa ferramenta em seu aprendizado têm a vantagem de aplicá-la não apenas em sala de aula, mas também durante sua prática profissional como engenheiros.

Além disso, no que diz respeito a concepções de trabalhos futuros, recomenda-se estudos que abordem estruturas com diferentes configurações de apoios e outros tipos de carregamentos. Isso se justifica pelo fato de que essa área de pesquisa ainda carece de atenção na comunidade científica, havendo, portanto, uma lacuna considerável a ser preenchida, levando em consideração que para a elaboração deste estudo não encontrou-se nenhum artigo ou pesquisa que incorporasse o uso do Excel® no estudo da linha elástica.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à equipe do LOADS® - Laboratory for Optimization, Analysis and Design of Structures and Materials o apoio e orientações técnicas para publicação desse artigo.

REFERÊNCIAS

- [1] NIAZKAR, M.; AFZALI, S. H. 2015. Application of Excel spreadsheet in engineering education. In: First International & Fourth National Conference on Engineering Education, Shiraz University, p. 1-7.
- [2] OLIVEIRA, C. J. *et al.* 2019. Aplicação do software Excel como ferramenta de ensino para resolução de treliças planas utilizando elementos finitos de barras. Revista Tecnologia, Fortaleza, v. 40, n. 2, p. 1-13.
- [3] LOPES, A. P. *et al.* 2005. Utilização de planilhas eletrônicas no ensino do método de Cross. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia (COBENGE), Campina Grande-PB.
- [4] GERE, J. M.; GOODNO, B. J. Mecânica dos materiais. 8ª ed. São Paulo, 2017.
- [5] BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr.; DEWOLF, J. T. Mecânica dos Materiais. tradução e revisão técnica Celso Pinto Morais Pereira. 3ª ed. São Paulo, 1995.